GEOMETRIA PLANA

Por que aprender a Geometria Plana?

O estudo da Geometria nasceu da necessidade que o homem tinha em medir as suas terras. É de grande importância conhecermos as formas e suas características, para podermos utilizá-las melhor no nosso cotidiano.

Onde usar os conhecimentos de Geometria Plana?

Na maior parte do tempo, você não utiliza a Geometria, mas sim se utiliza dela. Este livro que você está lendo tem uma forma geométrica. O espaço ocupado por este pequeno texto nada mais é do que a utilização de uma pequena área desta figura geométrica. A cadeira que você senta, a mesa que você usa, entre tantos outros objetos, são figuras e formas geométricas.

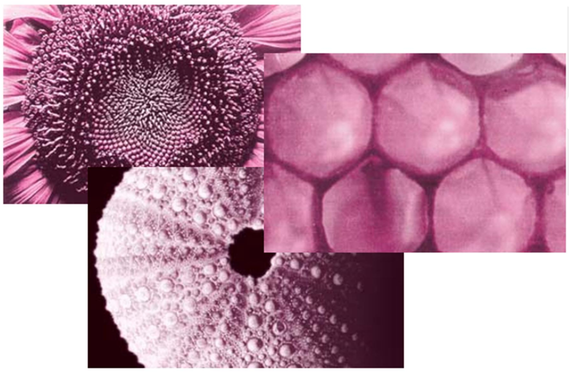
Geometria plana

A palavra Geometria tem origem grega e significa “medida da terra” (geo = terra; metria = medida).

No antigo Egito, a geometria era muito utilizada, um exemplo disso são as grandes pirâmides. Eles mediam sombras, inventaram os relógios de sol e construíram edifícios.

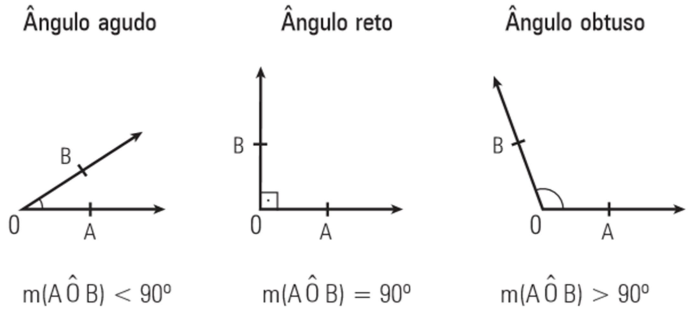
Por volta do século X a.C., os gregos começaram a transformar a ciência prática numa abstração.

Na geometria destacaram-se grandes matemáticos, como Pitágoras, Euclides e Arquimedes, que descobriram as fórmulas para desenhar e medir figuras planas, como círculos, esferas e triângulos. O interesse pelas formas geométricas, não se preocupando com as medidas, acompanha os seres humanos até hoje.



Ângulos

Podemos classificar os ângulos em:

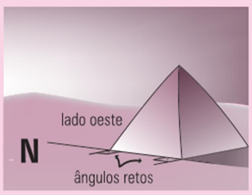


Saiba mais

Como podemos relacionar um ângulo com as pirâmides?

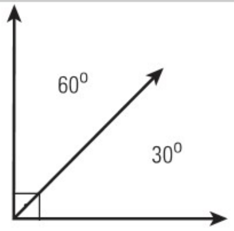
A História está presente até na Geometria. A localização das pirâmides era obtida traçando-se o lado oeste sempre em direção ao norte.

Os três lados restantes eram traçados, em relação ao primeiro, em ângulo reto.



Ângulos Complementares

Dados dois ângulos, dizemos que eles são complementares quando a soma das medidas for 90°.



$30° + 60° = 90°$

Para descobrirmos o complemento de um ângulo, usaremos a expressão $(90° - x)$.

Exemplo:

Dê o complemento de um ângulo de 20°.

Solução:

Seu complemento será $90° - 20° = 70°$.

Saiba mais

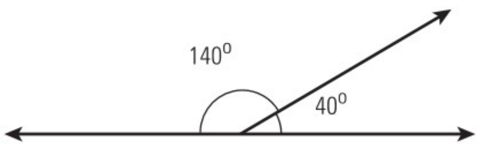
ÂNGULO CERTO

Para saber quantos graus um astro estava acima do horizonte, usava-se a balestrilha (conjunto de varas grudadas, perpendiculares entre si). Olhava-se por uma ponta da maior e movia-se a menor. Quando a extremidade de cima da vara menor encontrava o astro e a de baixo encontrava-se no horizonte, formava-se o ângulo com o qual se podia calcular a altura da estrela.

Fonte: *Superinteressante*, abril, 1999.

Ângulos Suplementares

Dados dois ângulos, dizemos que eles são suplementares quando a soma das medidas for 180°.



$140° + 40° = 180°$

Para descobrirmos o suplemento de um ângulo, usaremos a expressão $(180° - x)$.

Exemplo:

A metade do suplemento de um ângulo mede 80°. Determine x.

Solução:

$$\frac{180° - x}{2} = 80°$$

$$180 - x = 160$$

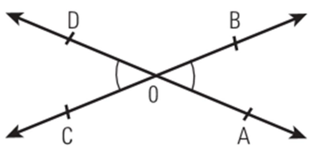
$$-x = -20$$

$$x = 20°$$

Ângulos Formados por Duas Retas Concorrentes: Ângulos Opostos pelo Vértice (o. p. v.)

Dois ângulos são opostos pelo vértice quando o lado de um deles é uma semireta oposta ao lado do outro.

Dois ângulos são opostos pelo vértice quando o lado de um deles é semireta oposta ao lado do outro.



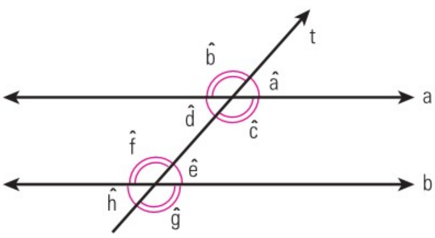
$A\hat{O}B = C\hat{O}D$

$A\hat{O}C = B\hat{O}D$

Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Ângulos Formados por Duas Retas Paralelas Cortadas por uma Transversal

Ângulos Correspondentes

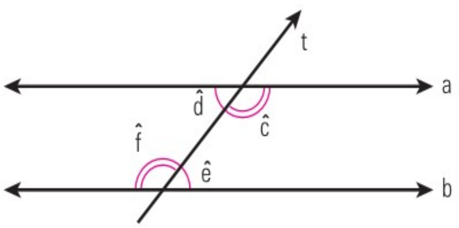


$\hat{a} = \hat{e}$ $\quad \hat{b} = \hat{f}$

$\hat{c} = \hat{g}$ $\quad \hat{d} = \hat{h}$

Ângulos correspondentes são congruentes.

Ângulos Alternos Internos

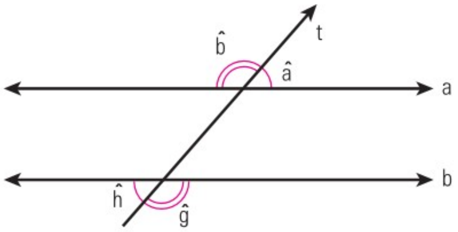


$\hat{c} = \hat{f}$

$\hat{d} = \hat{e}$

Ângulos alternos internos são congruentes.

Ângulos Alternos Externos

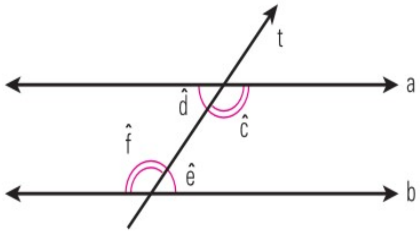


$\hat{a} = \hat{h}$

$\hat{b} = \hat{g}$

Ângulos alternos externos são congruentes.

Ângulos Colaterais Internos

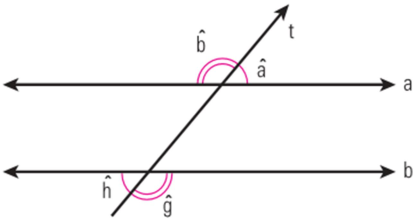


$\hat{c} + \hat{e} = 180^o$

$\hat{d} + \hat{f} = 180^o$

Ângulos colaterais internos são suplementares.

Ângulos Colaterais Externos



$\hat{a} + \hat{g} = 180^o$

$\hat{b} + \hat{h} = 180^o$

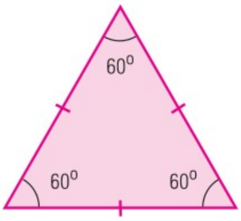
Ângulos colaterais externos são suplementares.

Triângulos: Classificação

Podemos classificar os triângulos quanto aos lados e aos ângulos.

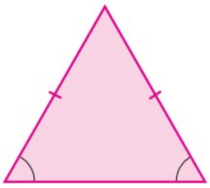
Quanto aos Lados

Eqüilátero



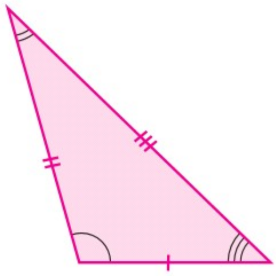
Possui três lados iguais e os três ângulos internos congruentes.

Isósceles



Possui dois lados iguais e os ângulos da base são congruentes.

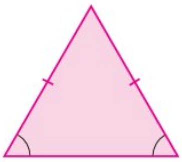
Escaleno



Possui os três lados e ângulos diferentes.

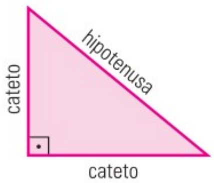
Quanto aos Ângulos

Acutângulo



Possui os ângulos internos agudos.

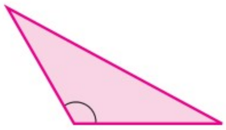
Retângulo



Possui um ângulo reto.

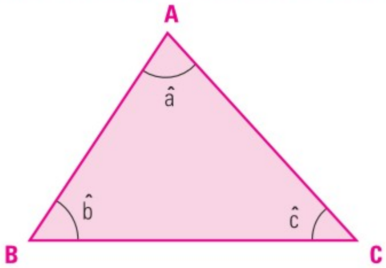
Os lados do triângulo retângulo recebem nomes especiais: catetos e hipotenusa.

Obtusângulo



Possui um ângulo obtuso.

Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo

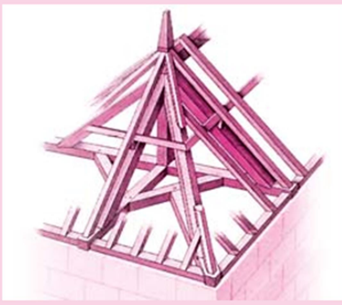


$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^{\circ}$

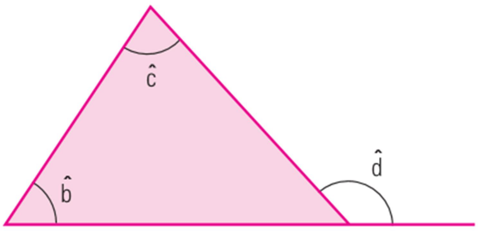
Saiba mais

O triângulo é uma das figuras mais importantes da Geometria. Eles são utilizados, por exemplo, em construções.

Observe na armação de um telhado os diferentes tipos de triângulos que podem ser encontrados.



Ângulo externo

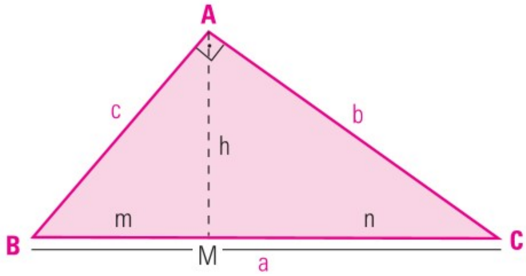


$\hat{d} = \hat{b} + \hat{c}$

Em qualquer triângulo, a medida de qualquer ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Relações Métricas num Triângulo Retângulo

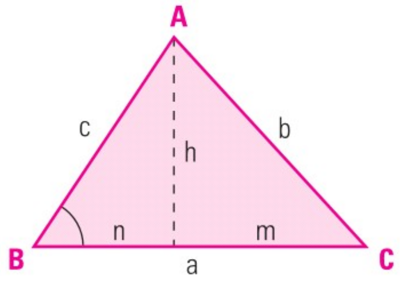
Dado um triângulo retângulo, podemos estabelecer as seguintes relações métricas:



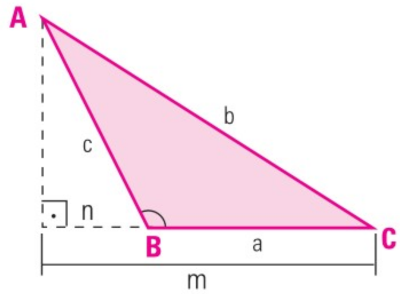
a – $m(\overline{BC})$ hipotenusa
b – $m(\overline{AC})$ cateto
c – $m(\overline{AB})$ cateto
h – $m(\overline{AM})$ altura
m – projeção referente ao cateto c
n – projeção referente ao cateto b

$a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras)
$b^2 = a \cdot n$
$c^2 = a \cdot m$
$h^2 = m \cdot n$
$a \cdot h = b \cdot c$

Relações Métricas num Triângulo Qualquer



$\hat{b} = \hat{a} + \hat{c} - 2an$



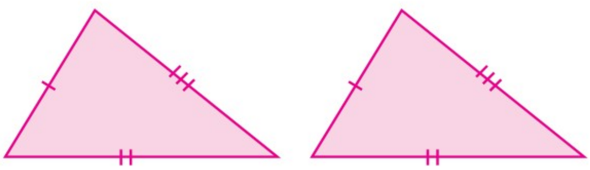
$\hat{b} = \hat{a} + \hat{c} + 2an$

Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes e os lados homólogos são proporcionais.

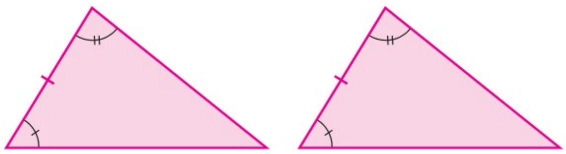
Critérios de Congruência (Semelhança)

1º Caso: L. L. L. (lado, lado, lado)



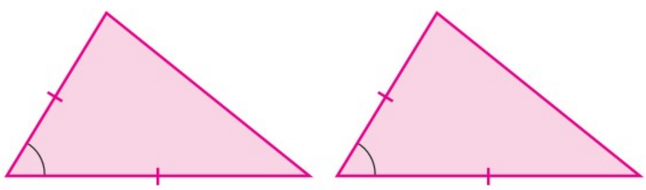
Dados dois triângulos cujos três lados de um são proporcionais aos três lados do outro, conclui-se que estes triângulos são semelhantes.

2º Caso: A. L. A. (ângulo., lado, ângulo)



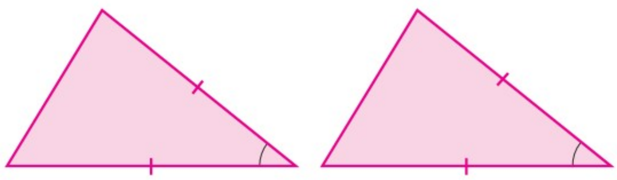
Suponha que dois triângulos possuam dois lados congruentes entre si e, além disso, o ângulo formado por esses lados também seja congruente.

3º Caso: L. A. L. (lado, ângulo, lado)



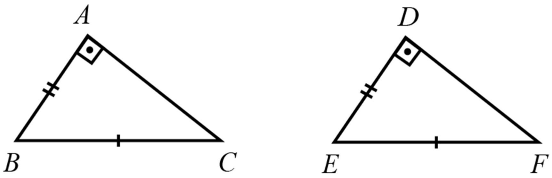
Dados dois triângulos, sendo dois lados de um triângulo proporcionais a dois lados do outro triângulo e o ângulo entre estes lados semelhante nas duas formas geométricas, concluímos que os triângulos são semelhantes.

4º Caso: L. A. A_0. (lado, ângulo, ângulo oposto)



Dois triângulos serão congruentes caso tiverem um lado e um ângulo côngruos entre si e, além disso, um segundo par de ângulos congruentes, de modo que eles sejam opostos a tal lado.

Há ainda um caso particular a se considerar quando tratamos de **congruência de triângulos retângulos**: se a hipotenusa e um cateto de dois triângulos retângulos forem côngruos entre si, então tais triângulos serão congruentes.



Neste caso especial de congruência de triângulos retângulos, precisamos verificar apenas dois elementos dos triângulos em estudo, o que torna mais simples ainda quando comparado aos seis elementos (os três lados e os três ângulos internos) que deveríamos, a princípio, analisar.

Exceto pelo caso especial de congruência para triângulos retângulos, todos os casos acima exigem a **demonstração de congruência** entre apenas **três elementos** dos triângulos, o que reduz pela metade o trabalho inicial que teríamos caso fôssemos mostrar a congruência através de sua definição inicial.

A vantagem dos casos de congruência de triângulos consiste na não necessidade de se provar os seis critérios, a fim de concluir que eles são côngruos. Satisfazendo um dos casos mencionados acima, pode-se afirmar que os triângulos serão congruentes e, por consequência direta, todos os seus respectivos lados e ângulos serão côngruos entre si.

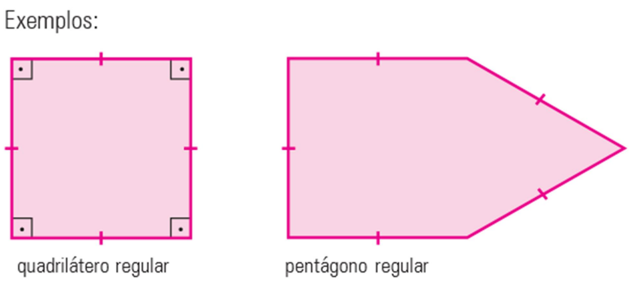
Propriedades

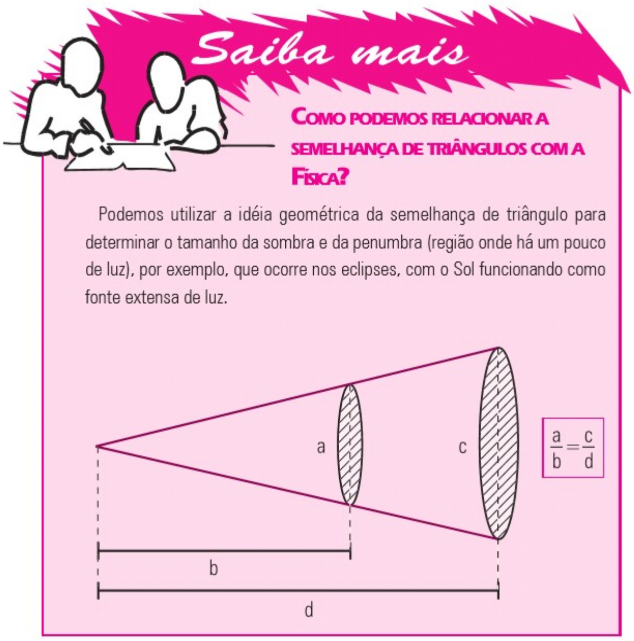
Existem algumas propriedades sobre congruência de triângulos:

- **Reflexiva:** um triângulo é congruente a si mesmo;
- **Simétrica:** se um triângulo *ABC* for côngruo a um triângulo *DEF*, então o triângulo *DEF* será congruente ao triângulo *ABC*;
- **Transitiva:** caso um triângulo *ABC* seja congruente a um triângulo *DEF* e o triângulo *DEF* for congruente ao triângulo *GHI*, então o triângulo *ABC* será côngruo ao triângulo *GHI*.

Polígonos Regulares

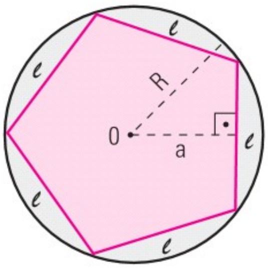
Todo polígono que possui todos os seus lados congruentes é regular.





Elementos de um Polígono Regular

Dado um polígono regular inscrito num círculo, temos:



- a — apótema do polígono
- ℓ — lado do polígono
- R — o raio da circunferência circunscrita
- A — a área do polígono inscrito
- π — o semiperímetro do polígono

Obs.: A medida do apótema de um polígono é igual ao segmento que parte do centro formando um ângulo reto com o lado.

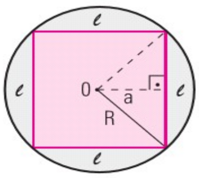
Saiba mais

A BELEZA ESTÁ SEMPRE AO NOSSO REDOR

As várias formas encontradas na natureza têm chamado a nossa atenção há muitos séculos. Os favos de mel construídos pelas abelhas, por exemplo, têm o formato de um polígono.

Relações Métricas nos Polígonos Regulares

Quadrado

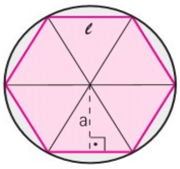


$\ell_4 = R\sqrt{2}$

$a_4 = \dfrac{\ell}{2}$

$A = 2R^2$

Hexágono

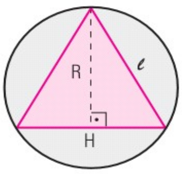


$\ell_6 = R$

$a_6 = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$A = \dfrac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$

Triângulo eqüilátero

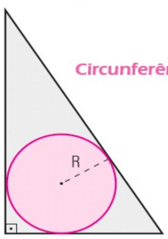


$\ell_3 = R\sqrt{3}$

$a_3 = \dfrac{R}{2}$

$A = p \cdot a$

Circunferência inscrita em um triângulo retângulo



$h = 3R$

Resumindo

Polígonos inscritos e circunscritos:

	inscrito		circunscrito	
	lado	apótema	lado	apótema
Quadrado	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2r$	r
Hexágono	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2r\sqrt{3}}{3}$	r
Triângulo eqüilátero	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$2r\sqrt{3}$	r

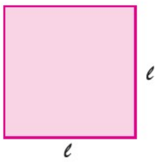
Saiba mais

Num parafuso, o polígono é sempre regular.

Os mecânicos, para consertar um defeito num automóvel e deixar o trabalho mais cômodo, necessitam de parafusos sextavados, pois eles podem ser apertados ou desapertados com ângulos de 60º, apresentando assim movimentos mais curtos para o braço.

Área das Principais Figuras Geométricas Planas

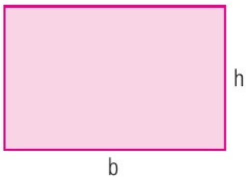
Quadrado



$\ell \rightarrow$ lado

$A = \ell^2$

Retângulo

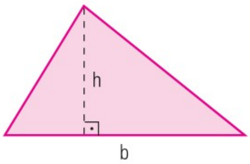


$b \rightarrow$ base

$h \rightarrow$ altura

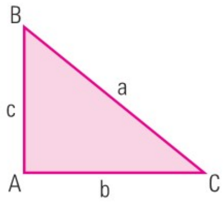
$A = b \cdot h$

Triângulo



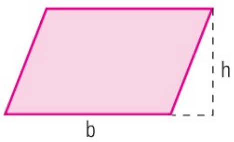
$A = \frac{b \cdot h}{2}$

Triângulo Retângulo



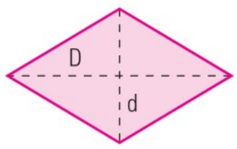
$A = \frac{b \cdot c}{2}$

Paralelogramo



$A = b \cdot h$

Losango

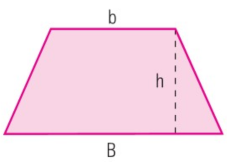


$d \rightarrow$ diagonal menor

$D \rightarrow$ diagonal maior

$A = \frac{D \cdot d}{2}$

Trapézio

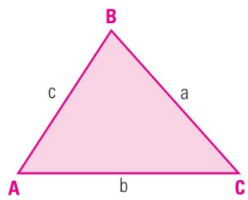


$b \rightarrow$ base menor

$B \rightarrow$ base maior

$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

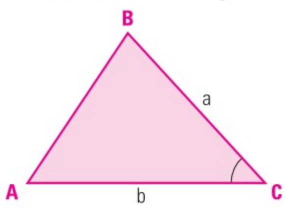
Triângulo qualquer em função dos lados



$A = \sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}$

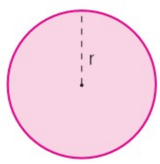
em que $p = \frac{a + b + c}{2}$

Triângulo qualquer em função de dois lados e do ângulo compreendido



$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \operatorname{sen} \hat{C}$

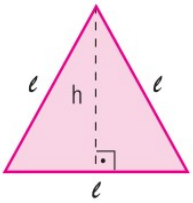
Círculo



$A = \pi r^2$

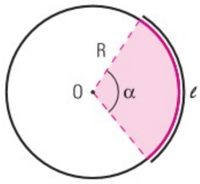
Obs.:

No triângulo eqüilátero temos:



$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ $\quad A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

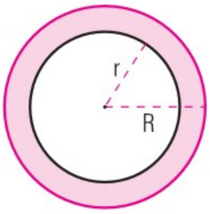
Setor Circular



α em graus: $A = \frac{\alpha\pi R^2}{360^o}$

α em radianos: $A = \frac{\alpha R^2}{2}$

Coroa Circular



$A = \pi(R^2 - r^2)$

Saiba mais

Figuras geométricas e urbanização

Nas grandes cidades, há muitas favelas, sem planejamento de casas e ruas.

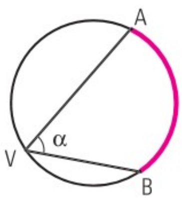
Para melhorar as condições de vida, uma das soluções é a execução de obras de urbanização.

Com isso, melhora-se o traçado das ruas e as casas são derrubadas para serem construídas em lugares melhores, tornando assim possível a instalação de esgoto e a coleta de lixo.

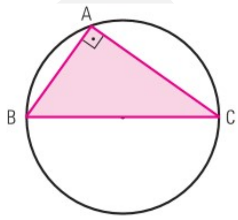
Para a urbanização das favelas, é necessário inicialmente fazer uma planta, utilizando figuras geométricas.

Será que isso resolve o problema das favelas? E o que podemos fazer quanto à questão social?

Ângulo Inscrito em uma Circunferência



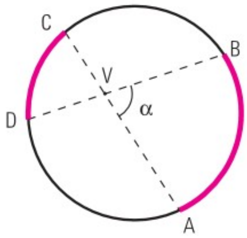
$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$



Δ ABC é retângulo

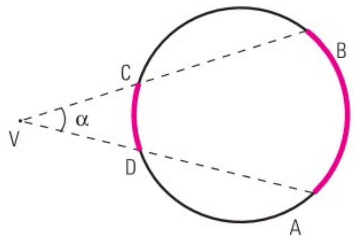
Obs.: Todo ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.

Ângulo de Vértice Interno



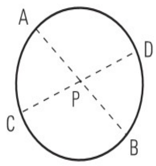
$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$

Ângulo de Vértice Externo

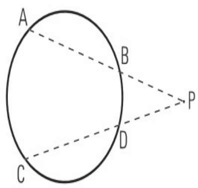


$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$

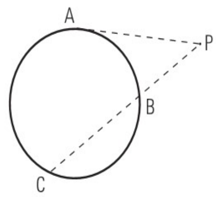
Relações Métricas na Circunferência



$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$

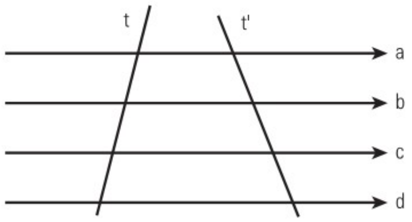


$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$



$\overline{PA}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$

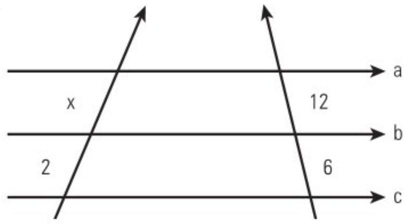
Teorema de Tales



Um feixe de retas paralelas determina sobre suas transversais segmentos proporcionais.

Exemplos: Determine o valor desconhecido das figuras.

a)



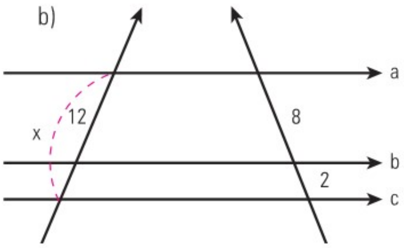
Solução:

$\frac{x}{2} = \frac{12}{6}$

$6x = 24$

$x = 4$

b)



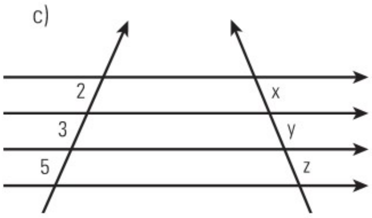
Solução:

$\frac{x}{12} = \frac{10}{8}$

$8x = 120$

$x = 15$

c)



Sendo $x + y + z = 40$

Solução:

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{40}{10} = 4$

$\frac{x}{2} = 4 \Rightarrow x = 8$

$\frac{y}{3} = 4 \Rightarrow y = 12$

$\frac{z}{5} = 4 \Rightarrow z = 20$

Fonte de Pesquisa

Manual de Matemática, disponível em:
file:///C:/Users/Fabianab/Desktop/LIVROS/LIVROS%20DE%20MATEMATICA/Geometria%20Plana.pdf